

自然界的密碼

-----黃金比例

作者

初冠嫻。私立曉明女中。二年戊班

自然界的密碼

-----黃金比例

壹●前言

在讀《達文西密碼》一書時，書中所提到的五芒星、費伯納奇數列、PHI、神聖比例等，引發了我的興趣。究竟什麼是神聖比例（或者說「黃金比例」）？而五芒星、費伯納奇數列與它又有什麼關係？在整個宇宙中什麼東西是符合黃金比例的？它在生活上的應用是什麼？我想這些都值得去探索。

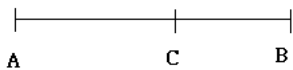
而在用網路稍做搜尋後，我發現到黃金比例除了在自然界中不斷的出現外，在音樂、建築、藝術作品，甚至是股票波動中都隱含著神秘的 1.618。黃金比例真的有這麼神奇嗎？

貳●正文

一、認識黃金比例

01.黃金比例及其特性

根據歐幾里德(Euclid, 325-270 B.C.)在《幾何原本》中下的定義：「一直線按中末比分割的意思是說，該直線的全長和分割後較長線段知比等於長線段與短線段之比。」(註：黃金分割比又稱中末比)



設較短線段 CB 為 1 個單位，較長線段 AC 為 x 單位。若 $x:1=(x+1):x$ ，交叉相成後可得 $x^2 - x - 1 = 0$ ，得到 $x=1.618$ 。

由 $x^2 - x - 1 = 0$ 可得知 $x^2 = x + 1 = 2.618$ ，而同除 x 後可得知 x 的倒數 $= x-1 = 0.618$ 。此外黃金比例可用連分數及平方根表示。

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}} = [1; 1, 1, 1, 1, \dots]$$

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

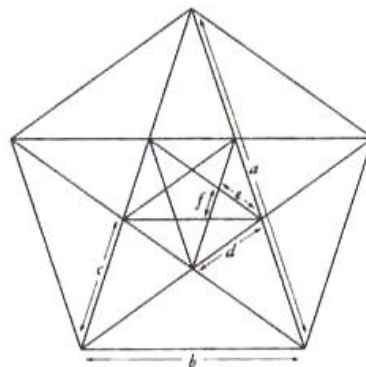
在尚未提到黃金比例在自然界中神奇的應用前，PHI 本身已足以引起人們的好奇。

02. 黃金比例、五芒星以及費伯納奇數列的關係

A. 五芒星

將正五邊形的頂點以對角線相互連結，即可得一五芒星。五芒星中間出現一個小正五邊形，將其對角線相互連結又形成了更小的五芒星，依此類推，可以無限延伸下去。圖中， a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 每一線段與後一線段之比均等於 1.618。

(可看成以 36 度為頂角之等腰三角形，其腰長與底邊長之比=1.618)(註一)



B. 費伯納奇數列

費伯納奇數列出自於李奧納多·費伯納奇在西元 1202 年出版的一本叫《算盤之書》的書，費伯納奇數列又可稱為兔子數列或費氏數列。所謂費波納奇數列 (Fibonacci sequence) 是指 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 等一串數字，它是費波納奇研究兔子生產問題時所發現的數列。而這個數列的規則，末項是前兩項之和，所以第三項是前一二項之和，第四項便是第三項加第二項，依此類推。而當我們用後項除以前項時，隨著除數與被除數的增加，會發現其值趨近於 1.618。

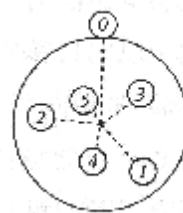
二、黃金比例的應用

01. 自然界中的生物

A. 植物

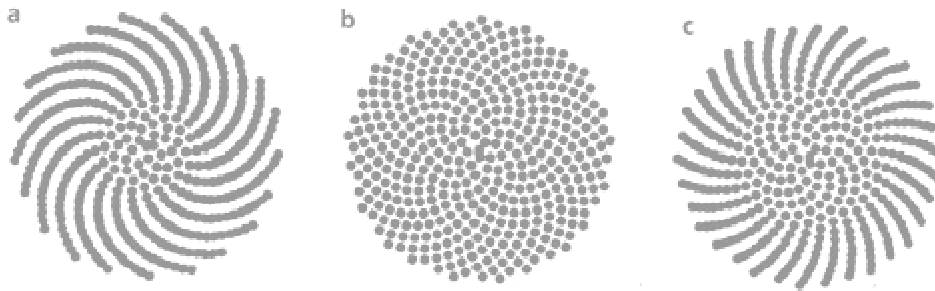
一般枝幹上的葉子生長，為了得到最佳的陽光照耀、呼吸空間以及雨露均沾，一片片葉子的生長會沿著莖幹而成螺旋移動，分別以二分之一轉、三分之一轉、五分之二轉、八分之三轉等比例生長（意即順著螺旋生長的第一片葉子起算，轉了三圈的範圍裡共長出八片葉子，因此稱每片葉子便是八分之三轉），不同植物有不同比例，但都是循著費波納奇數列的數字。而且這些分布的角度，在測量計算上也和黃金比例有關，在視覺感官上也似乎多了一絲和諧的味道。

從植物的生長點(即莖的頂端)往下看，會發現越早長出的葉子越容易從莖幹的中心向外輻射生長。當我們用一條曲線將葉子依序連起來，會形成「生成螺線」。而將莖幹與葉子連接起來的直線所形成的夾角，稱為「發散角」，大約等於 137.5 度。(註二)



因為每片葉子在照射太陽光這一點上都想獲得同等的地位，因此，每片新葉需從枝幹上尋找一個還尚未被下面葉子佔據的方向。隨著葉子越長越多，可資利用的間隙被葉子佔據四周變得越來越擁擠了。而 137.5 度角的重要性就在於它最能最均勻地逐漸分割圓的一個角度。

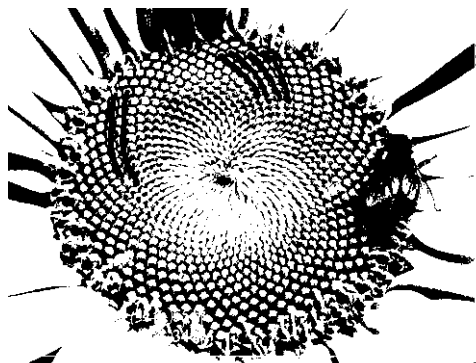
以別的角度作為重複間距時，情況會怎樣？首先，如果是一個圓周角的任何簡單分數的角度都將出現下列弊病；即經過有限次以後，會重合於原來的方位，於是，這將使有一些方向的葉子被上面生長的葉子進住，這對植物生長當然是很不利的。下圖中 **a** 為 137.3 度角，**b** 為黃金角，**c** 為 137.6 度角。(註三)



如圖所見，以黃金角作為間距，能夠最有效的利用空間。那麼，黃金角與黃金比例有什麼關係呢？將圓周 360 度以黃金比例分割 (360 度乘以 0.618)，即分個成 137.5 度及 222.5 度兩個部分，因此，稱 137.5 度為黃金角。

此外，大多植物的花瓣數目都屬於下列級數： 3 、 5 、 8 、 13 、 21 、 34 、 55 、 89 。例如：百合花有 3 瓣，梅花有 5 瓣，飛燕草是 8 瓣，萬壽菊有 13 瓣，紫堇有 21 瓣，大多數的雛菊是 34 、 55 、 89 瓣。

我們不只可以在花瓣數目中發現費伯納奇數列，如果仔細觀察一朵向日葵，可以看到向日葵的小花會排列成兩組螺線，一組順時鐘旋轉，另一組反時鐘旋轉。兩組螺線確切的數目由品種決定，但通常是 34 與 55 ， 55 與 89 ， 89 與 144 。以此種方式生長，小花可以最有效益的共享水平空間。(註四)

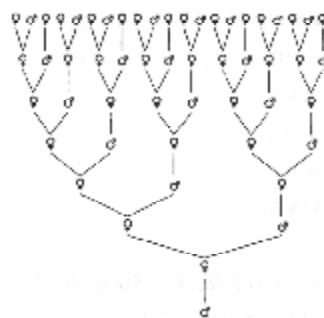


而鳳梨外皮的六角形鱗片、雛菊的花瓣數、玫瑰花瓣的分布位置，也都遵循著費波納奇數列和黃金比例的安排。

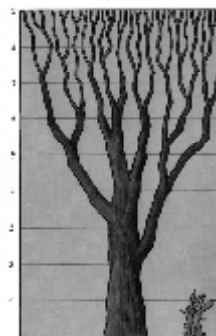
B.動物

最著名的例子便是鸚鵡螺，其每圈螺旋直徑與下一圈的比值也是 1.618 。當然，因為每個鸚鵡螺長的不太一樣，所以並不是隨手拿一個鸚鵡螺量出來的值就等於 1.618 ，而是測量多個鸚鵡螺並發現其值趨近於 1.618 。

在蜂窩中，除了雌蜂數目除以雄蜂數目等於 **1.618** 外，因為蜂后的卵從雄蜂處受精後可發育成雌蜂(可變成工蜂或蜂后)，而工蜂的卵不經受精可長成雄蜂，因此，一隻雄蜂的家譜可繪成如右(註五)：



又，《算盤之書》的第十二章中：「某人放了一對兔子在一個四面被牆包圍的地方。假設每個月每對兔子會生一對小兔子，而一個月後小兔子長大又能生一隻小兔子，那這一年中會有多少兔子？」每個月兔子的對數便是費伯納奇數列。而樹枝的生長也是一樣，依據費伯納奇數列的原理將之繪成圖，即與右圖相同。



02.人類創作

A.音樂

1995 年，數學家普茲針對莫札特的《C 大調奏鳴曲第一章》做分析。奏鳴曲主要分成「主題的闡明」與「展開及重複」兩個部分，在《C 大調奏鳴曲第一章》中，「展開及重複」有 62 節，而「主題的闡明」有 38 節，兩者的比值等於 **1.63**，與黃金比例相當接近。

另外，匈牙利音樂學家連得懷研究著名作曲家巴爾托克的一個樂章，他發現到該樂章 89 個小節中，若以放入、移除弱音，金字塔高峰(響度最大處)，或其他結構上的改變為分界點的話，可粗分為 55、34 小節，細分為 34、21、13、13、8 個小節，令人訝異的是，全都是費伯納奇數列中鄰近的數，當然，根據前面所寫的，其比值也與 **1.618** 相近。(註六)

B.建築

在《黃金分割》一書中，作者柴興聲稱屋頂三角面的頂端至基底的高度與支柱高度比等於黃金比例。多數關於黃金比例的書也提及，著名的「巴特農神殿」的三角牆之尺寸符合黃金比例。



此外，巴黎艾非爾鐵塔第二層以下和第二層以上之比設計成黃金比。



(註七)

多倫多電視塔高 553.33，觀景樓恰於此線段之黃金分割點。



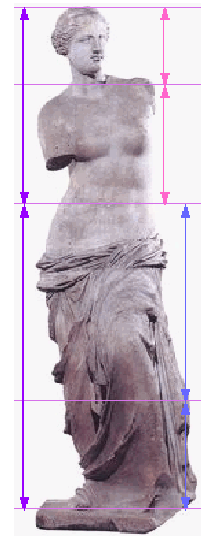
C.藝術作品

在米勒的「拾穗」圖中，人物的安排就是黃金分割。每二線段長相除都是 1.618, 因為符合 1.618 的圖形是最美的。(同註七)



達文西的「蒙娜麗莎的微笑」，如果你畫一個以她左手腕到右手肘為寬，手腕到頭頂為長，畫一個長方形，你就會發現這就是一個黃金矩形，而再繼續向內分割作出更多黃金矩形，你更會發現這些矩形的邊緣切過她的眼睛、下巴、嘴巴、鼻子，也有人認為，這幅畫是達文西作為一個數學家與藝術家，刻意把數學與藝術結合之後的結晶。

人的肚臍位於人體身高的黃金分割點。肚臍以上，頸部是黃金分割點；肚臍以下膝蓋是黃金分割點。身材婀娜多姿的美女大多符合此黃金比。古希臘人早就發現了這個人體比例的奧秘，並將它充分運用於藝術雕塑中。米洛的維納斯雕像，象徵愛與美的女神，被視為女性體型美的標準。(註八)



D.生活

去逛鐘錶店時，會發現指針常被撥到十點十分的位置，那是因為指針所切出的面積佔鐘面的 0.382，也就是將鐘面黃金分割。另外，將扇子張開 140 度(實際上應為 137.5 度)最賞心悅目，這也是利用黃金分割的結果。

而人們常說穿高跟鞋有修飾腳的作用，也是黃金比例的應用。假設某女士的原本軀幹(腳底至肚臍)與身高比為 0.60，即 $x:l=0.60$ 。若其所穿的高跟鞋高度為 d (量度單位必須與 x 及 l 相同)，則新比值是 $(x+d):(l+d)=(0.60l+d):(l+d)$ 。將 x 與 l 代入數字即可求得 d 。

參●結論

在看過無數的資料後，我認為《達文西密碼》將黃金比例太過誇大。如同前面所說，「並不是隨手拿一個鸚鵡螺量出來的值就等於 1.618」，也不是每個蜂巢中雌蜂數目除以雄蜂數目都等於 1.618，更不用說將身高除以軀幹長(腳底至肚臍)了，同身高的人，他們的軀幹長也不盡相同，比例當然也不一樣了(所以才會有高跟鞋的出現以使比例更完美)。當然，在五芒星及費伯納奇數列上得到的印證，的確很神奇，但就「植物」而言，雖然不論是樹幹、枝葉還是花瓣的排列方式，會自然而然的依循黃金比例的原則生長，但是我想與其說是 DNA 對植物的作用，倒不如說是生存本能(為了能充分的運用資源)，使他們的生長與 1.618 有許多的巧合。而藝術方面的例子，也許在一些現代建築中(如巴黎艾非爾鐵塔、多倫多電視塔)，的確是依照黃金比例設計，但是像「巴特農神殿」，根據一些書(例如《建築：從史前到後現代主義/西方傳統》、《希臘》)所給的數據，計算後並不符合 1.618。我自己也用尺量了書上的巴特農神殿，不論是用哪兩個線段下去算，都與黃金比例無明顯的關係。至於音樂以及藝術作品方面，

是否只是瘋狂的數學迷穿鑿附會的結果？亦或冥冥之中，染色體上的 DNA 驅使人們將黃金比例加之於創作中？還有待探討。

肆●引註資料

- 註一、《黃金比例 1.61803……的秘密》p. 57 。李奧維著 。遠流出版。
- 註二、《黃金比例 1.61803……的秘密》p. 143~145 。李奧維著 。遠流出版。
- 註三、黃金比。<http://www.shsh.ylc.edu.tw/~t1046/theme/goldenratio/page4.html>
- 註四、《大自然的數學遊戲》p.13，184。史都華著。天下文化。
- 註五、《黃金比例 1.61803……的秘密》p. 132 。李奧維著 。遠流出版。
- 註六、《黃金比例 1.61803……的秘密》p. 226~228 。李奧維著 。遠流出版。
- 註七、大紀元時報。<http://hk.epochtimes.com/archive/Issue24/ktsw-1.html>
- 註八、黃金比。<http://www.shsh.ylc.edu.tw/~t1046/theme/goldenratio/page7.html>